

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 1:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & a-2 & 1 \\ a-1 & a & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = -a(a-2) - a^2 - 2(a-1)(a-2) = -a^2 + 2a - a^2 - 2a^2 + 6a - 4 = \\ = -4a^2 + 8a - 4$$

Así

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Se $a = 1$, existen menores de orde 2 non nulos, por exemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Polo tanto:

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \\ a \neq 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \end{array}}$$

Se $a = 0$, xa vimos que $|A| = -4 \neq 0$, polo que existe A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$ABA^{-1} - A = 2I \Leftrightarrow ABA^{-1} = A + 2I \Leftrightarrow B = A^{-1}(A + 2I)A = (I + A^{-1})A = A + 2I$$

$$\boxed{B = A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) $a = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$. É un sistema homoxéneo con $\text{rang}(A) = 2 < n^{\circ} \text{ incógnitas}$. Sistema compatible indeterminado con infinitas solucións:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -2z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 2:

a) Determinamos os vectores normais aos planos:

$$\vec{n}_{\pi_1} = (3,0,3) \parallel (1,0,1)$$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -3, 0) \parallel (1,1,0)$$

O ángulo α que forman os planos coincide co ángulo que forman os seus vectores normais. Así:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$

Se chamamos r á recta pedida e \vec{v}_r a un vector director dela,

$$\left. \begin{array}{l} r \parallel \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_1} \\ r \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_{\pi_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_r \parallel \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 1, 1)$$

Como a recta pasa polo punto $(0,0,0)$, as ecuacións paramétricas son:

$$r: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) Sexa s a recta perpendicular a π_1 pasando polo punto $(0,0,0)$ e \vec{v}_s o seu vector director, entón:

$$\left. \begin{array}{l} s \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_{\pi_1} = (1,0,1) \\ (0,0,0) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

O punto de intersección, M , de s con π_1 é o punto medio do segmento OO' (O' simétrico de $O(0,0,0)$).

Calculamos o punto M de intersección de s con π_1

$$3\lambda + 3\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 6\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow M\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$$

Se $O'(x, y, z)$, entón:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{3} = \frac{0+x}{2} \\ 0 = \frac{0+y}{2} \\ \frac{4}{3} = \frac{0+z}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{O'\left(\frac{8}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

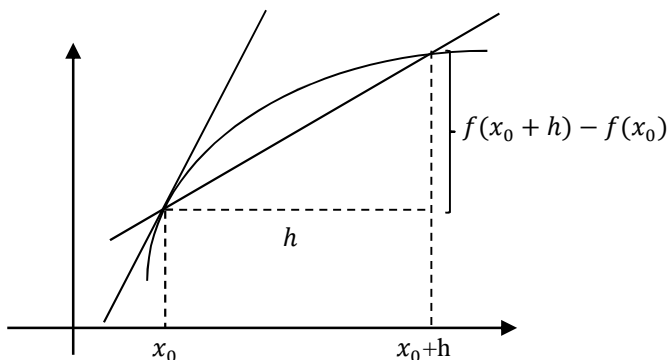
OPCIÓN A

Exercicio 3:

a) Dise que $f(x)$ é derivable no punto x_0 , se existe e é finito o seguinte límite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

representase por $f'(x_0)$ e chámase derivada de $f(x)$ en x_0 .



Interpretación xeométrica: A recta secante que pasa polos puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ ten por pendente $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ e cando $h \rightarrow 0$, esta secante acércase á recta tanxente pasando polo punto $(x_0, f(x_0))$. Así:

$$\text{Pendente da recta tanxente en } (x_0, f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + m & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{2x} - 2x + n & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 1 + m \Rightarrow m = -1$$

E por ser continua en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + n \Rightarrow n = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{2x} - 2x - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Recta tanxente en $x = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 5 \\ \downarrow \\ y - f(-2) &= f'(-2)(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = -5x - 5} \\ \uparrow \\ f'(-2) &= -5 \end{aligned}$$

Recta tanxente en $x = \frac{\ln 2}{2}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= -\frac{1}{2} - \ln 2 \\ \downarrow \\ y - f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right)\left(x - \frac{\ln 2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} + \ln 2} \\ \uparrow \\ f'\left(\frac{\ln 2}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN A

Exercicio 4:

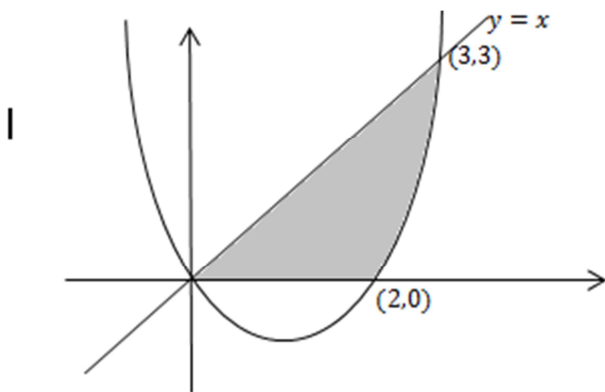
$$y = x(x - 2) = x^2 - 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x = 2 \end{cases} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Puntos de corte cos eixes:} \\ (0,0) \text{ e } (2,0) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2x - 2 \\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ y'' = 2 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mínimo e vértice } (1, -1). \text{ Convexa} \end{array}$$

Intersección da parábola coa recta $y = x$:

$$x^2 - 2x = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad \text{Puntos de corte: } (0,0), (3,3)$$



Polo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x dx + \int_2^3 [x - (x^2 - 2x)] dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_2^3 = 2 - 9 + \frac{27}{2} + \frac{8}{3} - 6 \\ &= \frac{-78 + 81 + 16}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{19}{6} u^2}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 1:

a) Matriz de coeficientes: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & m & 3 & m \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Cálculo do rango de C :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(C) \geq 2$$

Orlamos este menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 12 + 6 - 2m - 9 - 4 = -m + 5$$

$$\Rightarrow \text{rang}(C) = \begin{cases} 2 & \text{se } m = 5 \\ 3 & \text{se } m \neq 5 \end{cases}$$

Discusión:

$m = 5$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
 $m \neq 5$, $\text{rang}(C) = \text{rang}(A) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. Sistema compatible determinado.

b) Para $\boxed{m=5}$, é un sistema compatible indeterminado con infinitas solucións. O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + z = 1 - y \\ 4x + 3z = 5 - 5y \end{cases}$$

Entón:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 5-5y & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(3 - 3y - 5 + 5y) = 2 - 2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 4 & 5-5y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = -(5 - 5y - 4 + 4y) = y - 1$$

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= -1 + \lambda \end{aligned} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

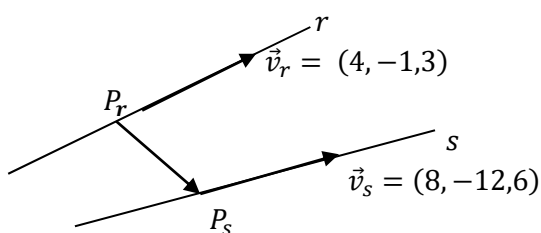
OPCIÓN B

Exercicio 2:

a) Calculamos o vector director da recta s :

$$\vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (8, -12, 6)$$

Como os vectores $\vec{v}_r = (4, -1, 3)$ e $\vec{v}_s = (8, -12, 6)$ non son proporcionais, xa podemos dicir que as rectas córtanse ou crúzanse.



Tomamos un punto en cada recta. Por exemplo:

$$P_r(3, 2, 1) \in r; \quad P_s(2, 0, -\frac{3}{4}) \in s$$

e consideramos o vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (-1, -2, -\frac{7}{4})$

Se os vectores que marcan as dirección das rectas, e o vector $\overrightarrow{P_r P_s}$ que vai dunha á outra son independentes, daquela non están no mesmo plano. Isto saberémolo vendo se o determinante formado por eles é distinto de cero ou non:

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} = 40 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{As rectas crúzanse}}$$

b) Sexa π o plano buscado. Como o plano contén á recta r , $P_r(3, 2, 1) \in \pi$. Ademais, os vectores \vec{v}_r e \vec{v}_s son vectores do plano. Polo tanto:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 3x - 4z - 5 = 0}$$

c) Como o plano π é paralelo á recta s e contén á recta r

$$d(r, s) = d(s, \pi) = d(P_s, \pi) = \frac{|6 + 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \boxed{4/5}$$

Tamén podemos calcular esa distancia utilizando a fórmula da distancia entre dúas rectas

$$d(r, s) = \frac{|(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -12 & 6 \\ -1 & -2 & -\frac{7}{4} \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(30)^2 + (40)^2}} = \boxed{4/5}$$

Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 3:

$$f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

Dominio:

A función non está definida onde se anula o denominador. Polo tanto, o dominio é $\mathbb{R} - \{2\}$

Simetrías:

$f(-x) = 1 + \frac{2}{(-x-2)^2} \neq \pm f(x)$. Polo tanto non é simétrica respecto do eixe Y nin respecto da orixe.

Puntos de corte cos eixes:

$f(x) > 0$. Polo tanto non corta ao eixe de abscisas.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Corta ao eixe de ordenadas no punto $(0, \frac{3}{2})$

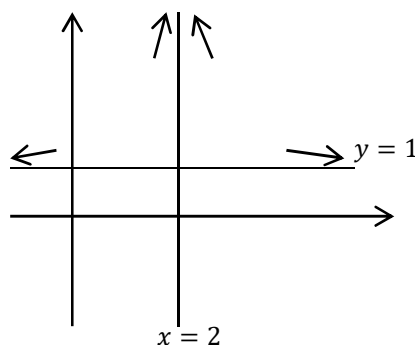
Asíntotas verticais:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ asíntota vertical}$$

Asíntotas horizontais:



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ asíntota horizontal}$$

Non hai asíntotas oblicuas



Intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos relativos:



$$f'(x) = -\frac{4(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{4}{(x-2)^3} \neq 0 \Rightarrow \text{Non hai puntos críticos}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

A función é crecente en $(-\infty, 2)$ e decrecente en $(2, +\infty)$. Non hai máximos nin mínimos.

Intervalos de concavidade e convexidade e puntos de inflexión:

$$f''(x) = \frac{12(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{12}{(x-2)^4} > 0. \text{ Non hai puntos de inflexión}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	+	+
$f(x)$		

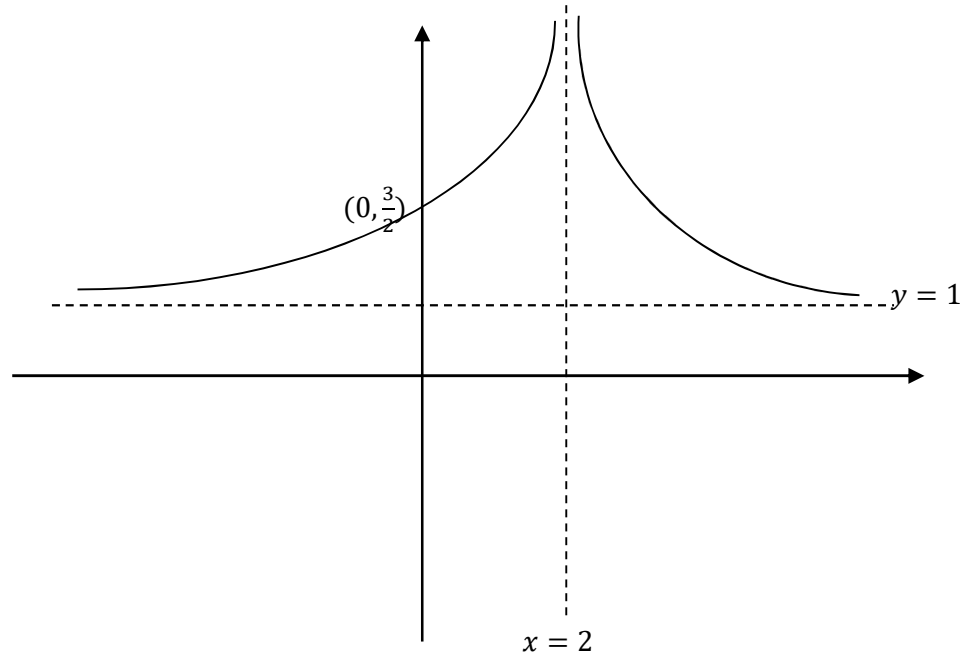
Convexa en todo o seu dominio

Exemplos de resposta / Soluções

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Gráfica de $f(x) = 1 + \frac{2}{(x-2)^2}$



Exemplos de resposta / Solucións

CONVOCATORIA DE SETEMBRO

OPCIÓN B

Exercicio 4:

a) Teorema fundamental do cálculo integral: Se $f(x)$ é una función continua en $[a, b]$, entón a función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivable e ademais $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.

Aplicación:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Recta tanxente: } y - F(0) = F'(0)(x - 0) \\ F(0) = 0 \\ F'(x) = \frac{x^2+6}{2+e^x} \Rightarrow F'(0) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{Recta tanxente: } y = 2x}$$

b) Calculamos a integral indefinida

$$\begin{aligned} \int x \ln(1+x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \quad \text{(grao numerador > grao denominador. Facemos a división)} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2} + C \end{aligned}$$

Aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 x \ln(1+x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} - \frac{\ln(1+x)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\boxed{\int_0^1 x \ln(1+x) dx = 1/4}$$